株価の運動方程式 : Nelson確率過程量子化法の価格変動理論への応用(京都大学基礎物理学研究所2003年度前期研究会 経済物理学-社会・経済への物理学的アプローチ-,研究会報告)

AUTHOR(S):

田崎, 隆敏

株価の運動方程式

Nelson 確率過程量子化法の価格変動理論への応用

田崎隆敏*

2003 年 7 月 15 日

この文章は 2003 年度前期「経済物理学」研究会で発表した内容に関する簡単な解説です。紙面に制限がありますので詳しくは私のホームページ www.geocities.co.jp/WallStreet-Bull/9352/より論文をダウンロードしてご参照ください。また、以下のメーリングリストを主催しておりますので御意見・御質問等ございましたらそちらにてお願いいたします。

[経済物理学ML]

www.freeml.com/info/econophysics@freeml.com

1 序論

Black-Scholes 方程式が仮定している株価の推移は幾何ブラウン運動と呼ばれる確率過程である。そこでは平均収益率にあたるドリフトは定数である。現実の株価を見る限りドリフトが定数であるとは考えづらい。Black-Scholes 理論はオプション価格の算出には成功したが現実的な株価の予測には役立たない。実際に株価の予測を行うためにはこのドリフトの詳細がわからないと不可能である。従って、このドリフトを価格や時間の関数として一般化することはより自然なことである。一般化された確率過程は次のとおりである。

$$dx(t) = \mu(x(t), t)dt + \sigma dW(t) \tag{1}$$

ここで t は時間、$x(t)$ は初期値からの株価の変化率、$\mu(x(t), t)$ はドリフト、σ はボラティリティで定数、$dW(t)$ は Wiener 過程である。一般にボラティリティは価格や時間の関数と考えられるが適当な変形を行うことで上式と同型に扱うことが出来る。私の基本的なアイデアは上の確率過程に Nelson の確率過程量子化 [1][2][3] を適用すれば株価の推移を量子力学的な理論形式で扱えるのではないかということである。量子力学的な描像のメリットは、ポテンシャルの詳細がわかれば株価の遷移確率を量子力学的な手法によって計算できることにある。そこでのポテンシャルをどう推定するかは今後の課題であるが一度ポテンシャルを決めてしまえば原理的にはすべて計算できてしまう。ちなみに Black-Scholes 方程式が仮定している幾何ブラウン運動は量子力学的描像で見るとポテンシャルフラットな空間を運動する量子の運動に対応する。また、金利の確率過程として知られている Ornstein-Uhrenbeck 過程は調和振動子の運動に対応する。

以下では簡単に Nelson の確率過程量子化を解説し価格変動モデルとして Sech 型ポテンシャルを試みる。

2 Nelson の確率過程量子化

Nelson の確率過程量子化においては (1) の前方微分の他に以下の後方微分も考える。

$$d^*x(t) = \mu^*(x(t), t)dt + \sigma dW(t) \tag{2}$$

(1)(2) において $dW(t)$ で条件付確率平均をとって第 2 項を除去し、それを時間微分したものを次で表わす。

$$Dx(t) = \mu(x(t), t), \quad D^*x(t) = \mu^*(x(t), t) \tag{3}$$

D, D^* はそれぞれ平均前方微分、平均後方微分と呼ばれている。このとき次の方程式が成り立つと仮定する。

$$m\frac{(DD^* + D^*D)}{2}x(t) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \tag{4}$$

これが Nelson の確率過程量子化の本質である。ここで、$V(x)$ はポテンシャル、m は比例定数で株価で言えば動きにくさ、Newton の運動方程式で言えば質量

*経済物理学ML代表 e-mail: takatoshi-tasaki@nifty.com URL: http://www.freeml.com/info/econophysics@freeml.com

に対応する量である．この式を Nelson-Newton 方程式と呼ぶことにする．さらに

$$u \equiv \frac{\mu - \mu^*}{2}, \quad v \equiv \frac{\mu + \mu^*}{2} \tag{5}$$

と定義して (4) を u, v で表すと次の式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

同様にして u, v について次の Fokker-Planck 方程式が成立する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

さらに、$\chi \equiv u + iv$ とおき $(7) + i \times (6) = 0$ として複素統合すると次の式が得られる。

$$i\frac{\partial \chi}{\partial t} + \chi\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

この式は $-it$ を虚時間、V を圧力と見なせば1次元版 Navier-Stokes 方程式と見なせる。この式は χ について非線形であるが Cole-Hopf 変換を行うと容易に線形化され多少の式変形の後次の式が得られる。

$$im\sigma^2\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{m\sigma^4}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \tag{9}$$

ここで $\hbar = m\sigma^2$ とおけばまさに Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \tag{10}$$

が得られる。

3　Sech 型ポテンシャルと価格変動

定常状態においては次の関係が成り立つ。

$$v = 0, \quad u = \chi = \mu = -\mu^* \tag{11}$$

この関係を使うと (8) からドリフト $\mu(x)$ とポテンシャル $V(x)$ の関係式が得られる。

$$\frac{m\sigma^2}{2}\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} + \frac{m}{2}\mu(x)^2 = V(x) - E \tag{12}$$

ここで E はエネルギーの次元を持つ定数である。この式は μ について Riccati の微分方程式を表している。特に上式を満たす解として

$$\mu(x) = -\tanh\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) \tag{13}$$

をとるとこれを満たすポテンシャル $V(x)$ は次のように与えられる。

$$V(x) = 2E\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) \tag{14}$$

ここで $E = -\frac{m}{2}$ とおいた。実はこの解は Schrödinger 方程式においてエネルギー固有値 E を一定とするようなポテンシャルの満たすべき方程式として KdV 方程式の1ソリトン解の特別な場合として求められる [4]。従って逆に多ソリトン解から $\mu(x)$ を構成することも可能だろう。

ところでこのポテンシャルによってもたらされる価格変動分布は確率密度 $\rho(x(t))$ で与えられポテンシャルの逆符号にに比例することから次のようになる。

$$\rho(x(t)) \propto \mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) \tag{15}$$

特に x が大きいときは

$$\rho(x(t)) \propto \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}x\right) \tag{16}$$

のように振舞うことがわかる。実は日経平均など日足の価格変動はほぼ指数分布に比例するが知られている [5] のでそれらを説明する素朴なモデルとして Sech 型のポテンシャルは興味深いものがある。

その他のスペキュレーションについては私のサイトにある論文をご参照ください。

参考文献

[1] E. Nelson, Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics, Phys. Rev. 150(1966), 1079-1085.

[2] 江沢洋「物理の視点」培風館、p.203～

[3] 保江邦夫「量子の道草」日本評論社、p.161～

[4] G.L. ラム, Jr.「ソリトン [理論と応用]」培風館

[5] Taisei Kaizoji and Michiyo Kaizoji, Exponential laws of a stock price index and a stochastic model, forthcoming into Advances in Complex Systems (2003) 海蔵寺さんのサイトにある論文を参照しました